

Schets voor een genealogie van de wiskunde

Victor Gijsbers

12 juli 2003

Inhoudsopgave

| | | |
|---|---|---|
| 1 | De grondslagenstrijd als genealogisch debat | 1 |
| 2 | Brouwer's pre-linguïstische oer-intuïtie | 2 |
| 3 | Het formeel-intuïtieve vraagstuk | 3 |
| 4 | 'Over de oorsprong van de meetkunde' | 4 |
| 5 | Van intuïtie naar formalisme, en terug | 5 |

1 De grondslagenstrijd als genealogisch debat

Waar toe een *genealogie van de wiskunde*? Dat mathematische waarheden zogezegd *eeuwig* en *a priori* geacht worden, verdoezelt al te gemakkelijk het feit dat voor een goed begrip van de huidige wiskunde méér nodig is dan een conceptuele analyse alleen. Dergelijke beschouwingen kunnen heel nuttig zijn voor het opleggen van normatieve claims aan de mathematische gemeenschap, maar tot een juiste kijk op de filosofische grondslagen van de wiskunde kunnen zij toch zonder verdere aanvullingen niet leiden. Wanneer wij de belangrijke stromingen die zich aan het begin van de twintigste eeuw lieten horen in de zogenaamde 'Grundlagenstreit' in ogeschouw nemen, dan zien wij dat zij allen verschillende claims maken over de ontologische status van wiskundige objecten. Maar deze claims zijn niet te scheiden van een opvatting over de genealogie van de mathematica. Indien, zoals de formalisten beweerden, wiskundige entiteiten als niet meer beschouwd dienen te worden dan syntactische entiteiten, rijen symbolen, dan volgen daar tenminste twee claims uit. Ten eerste dat de wiskunde ontstaan moet zijn uit een onderzoek naar taal en symbolen; ten tweede dat de drang tot het bedrijven van wiskunde in het subject volgt uit een wens om de eigenschappen van syntactische formele systemen te leren kennen. Beide veronderstellingen zijn echter discutabel. Het lijkt bijvoorbeeld veel waarschijnlijker dat de meetkunde zich, in zowel het historische als het persoonlijke kader, heeft ontwikkeld uit een intuïtie omtrent vormen en figuren, of uit landmeetkunde en techniek, dan uit een fascinatie met formele axiomatisaties – en zelfs een vluchtige blik op de geschiedenis en onze eigen eerste stappen op het gebied van de meetkunde leert ons dat dit inderdaad het geval is.

De meest voor de hand liggende verdediging is nu om te ontkennen dat de twee door mij opgevoerde genealogische claims geïmpliceerd worden door het formalisme. Voor een goed begrip van de wiskunde, zo zou men vol kunnen houden, moet slechts gekeken worden naar haar meest volwassen vorm – de kinderlijke dwalingen uit het verleden laten we buiten beschouwing. Eerst in de moderne tijd is duidelijk geworden wat wiskunde daadwerkelijk is. Dit lijkt echter nauwelijks een houdbaar

standpunt. Op onze scholen wordt wiskunde zo veel mogelijk op een aanschouwelijke, intuïtieve manier gepresenteerd, die zich ver houdt van een strikt formalisme. Het lijkt aannemelijk dat elke scholier, gevraagd naar het onderwerp van de *mathematica*, zal antwoorden dat zij gaat over getallen, lijnen, vlakken, functies – en dat hij of zij zich bij deze woorden ook een *voorstelling* kan maken die veel meer inhoudt dan rijen symbolen. Moeten wij nu ontkennen dat deze mensen zich met wiskunde bezig houden? Of moeten wij althans zeggen dat zij geen inzicht hebben in waar zij *echt* mee bezig zijn, en dat hun voorstellingen slechts als nuttige illusies getolereerd dienen te worden? Dit lijkt eerder een teken van arrogant dogmatisme dan van een plausible visie op de aard van de wiskunde. Eenzelfde argument kan opgehangen worden met betrekking tot het historische verleden. De mogelijkheid van niet-Euclidische meetkundes kan toch nauwelijks voldoende rechtvaardiging zijn voor het aanhangen van de stelling dat Euclides zich niet met – voor hem, mij en vele anderen aanschouwelijke – lijnen, punten en vlakken bezig hield, maar met een, helaas slordig uitgewerkt, formeel systeem van symbolen?

Om te voorkomen dat een filosofie van de wiskunde een dogmatisch program wordt, dat stelt ‘zo moet het, en niet anders!’, maar in plaats daarvan een realistische beschrijving geeft van wat wij allen *ervaren* als de wiskunde, is het noodzakelijk aandachtig te kijken naar de genealogie van de wiskunde. Door zowel in onze eigen ervaring als in de geschiedenis de ontwikkeling van de mathematische gedachten te volgen, kunnen wij inzicht verwerven in de ware aard van de wiskunde. Er was één grondlagenonderzoeker in de tijd van de *Grundlagenstreit* die zich hier terdegen van bewust was en zijn ‘intuitionisme’ koppelde aan een genealogie: L. E. J. Brouwer. Een kritische beschouwing van zijn ideeën en een vergelijking ervan met die van Husserl zal meer licht werpen op de aard van en de verhouding tussen intuitionisme en formalisme.

2 Brouwer’s pre-linguïstische oer-intuïtie

Brouwer’s filosofie heeft een zeer duidelijke mystieke dimensie, en deze speelt een grote rol bij zijn visie op de oorsprong van de wiskunde.¹ Hij beschouwt dit niet in een historische dimensie, maar vanuit het perspectief van de eenling. Het individu bevindt zich oorspronkelijk in een ongestructureerde, tijdloze levenstoestand. Maar doordat het bewustzijn zich bewust wordt van het voorbij strijken van de tijd komt hij uit deze oertoestand, en gaat hij zich betrekken op de externe wereld. Dit bewustzijn van de tijd komt doordat het subject opmerkt dat de ene sensatie over gaat in de andere sensatie – hij onderscheidt aldus een ‘heden’ en een ‘verleden’, een essentiële *tweeheid*. Dit is de eerste stap in het creëren van een mathematisch universum. Brouwer schrijft: “Mathematics comes into being, when the two-ity created by a move of time is divested of all quality by the subject, and when the remaining empty form of the common substratum of all two-ities, as basic intuition of mathematics, is left to an unlimited unfolding”². Er is echter nog een wiskundig object naast de tweeheid dat onmiddellijk aan het subject gegeven is: het continuum, als een tussen de twee elementen van de tweeheid gelegen gang van de tijd die niet door het invoegen van meer entiteiten uitgeput kan worden. Vanuit deze dubbele, in de perceptie van de tijd gevestigde, oer-intuïtie volgt de rest van de wiskunde door abstractie en herhaling.

Het is zeer belangrijk om op te merken dat de wiskunde voor Brouwer essentieel *pre-linguïstisch* is: het opbouwen van de wiskundige entiteiten vooronderstelt geen taal, en is ook nooit geheel in taal weer te geven. Wiskunde is feitelijk geen

¹Brouwer zet deze visie uitgebreid uiteen in ‘Consciousness, Philosophy, and Mathematics’, [4]. Zie ook Van Dalen, [6] en [7]. De bespreking in dit essay geeft slechts een zeer incompleet beeld.

²Brouwer, ‘Consciousness, Philosophy, and Mathematics’, [4] p. [[482]].

cultureel verschijnsel, maar een act van het individu; het wiskundige universum is precies de verzameling objecten die het subject voor zichzelf heeft opgebouwd vanuit de oer-intuïtie. De taal van de wiskunde noemt Brouwer: “. . . the language of mathematics, which itself is no mathematics, but only an inadequate aid for the people to communicate mathematics, and to support their memory for mathematics”³. Hiermee keert hij zich radicaal tegen de formalistische opvatting, die wiskunde juist als een spel met symbolen, een door en door ‘taal-achtige’ activiteit ziet.

De hele intuïtionistische wiskunde, waar hier verder niet op ingegaan zal worden, bouwt Brouwer op uit de noties die hierboven besproken zijn: alleen dat is wiskunde wat het subject kan opbouwen uit de pre-linguïstische oer-intuïties. Taal speelt hierbij geen enkele rol – slechts als zeer inadequaat middel om over wiskunde te kunnen communiceren en als manier om wiskunde te kunnen onthouden is zij überhaupt toelaatbaar. Deze visie heeft een groot voordeel tegenover de formalistische: zij geeft wiskunde een intuïtieve inhoud. Maar komt deze daadwerkelijk beter overeen met wat wij ervaren als wiskunde dan het beeld van formele systemen? Is het inderdaad het geval dat wij als individuen de wiskunde opbouwen vanuit de twee door Brouwer aangewezen oer-intuïties? Dit is op zijn minst aanvechtbaar, en het lijkt zeer wel mogelijk dat een andere theorie over de genealogie van de wiskunde plausibeler resultaten geeft. Maar wij wenden ons nu tot een ander probleem: dat van de rol van de taal in de wiskundige praktijk.

3 Het formeel-intuïtieve vraagstuk

Het moge dan zo zijn dat de wiskunde is opgebouwd vanuit intuïties, degene die Brouwer beschrijft of eventueel andere, maar toch is het formalistische standpunt niet zonder meer terzijde te schuiven. Het succes van de formalistische aanpak, waarbij wiskunde gezien wordt als het volgens strakke regels manipuleren van rijen symbolen, is namelijk onmiddellijk evident. Met grote eenvoud en efficiëntie is het wiskundigen gelukt een veelheid aan theorieën te formaliseren in betrekkelijk kleine axiomatische systemen. Hoewel een intuïtionist kanttekeningen kan zetten bij individuele resultaten, zal hij het algemene succes dat hier geboekt is toch moeten erkennen. Hierdoor wordt een belangrijk vraagstuk bloot gelegd: Hoe kan het zo zijn dat de wiskunde opgebouwd is uit intuïtieve noties, en toch gemakkelijk in de vrij non-intuïtieve vorm van formele systemen is te gieten? De aard van de wiskunde is hier in het geding. Aan de ene kant komt zij op ons over als een intuïtieve, aan de andere kant als een essentieel talige ervaring. Het formalisme en het intuïtionisme kiezen beide één van deze twee kanten uit, en verwerpen de andere – maar hiermee doen zij aan de essentiële wiskundige ervaring geen recht.

Een tweede voordeel dat het formalisme heeft tegenover het intuïtionisme is dat het idee dat velen van ons hebben dat wiskundige waarheden eeuwig en onveranderlijk waar zijn, vanuit het formalisme veel beter te verklaren valt dan vanuit het intuïtionisme. Eigenschappen van formele systemen zijn immers niet gebonden aan tijd en plaats, maar constructen van een subject zijn dat wel. De consequentie van Brouwer’s filosofie dat een wiskundige waarheid slechts waar is *omdat* ik hem construeer zal voor veel mensen onaanvaardbaar zijn.

Het moet mogelijk zijn een genealogie van de wiskunde te ontwerpen waarin duidelijk wordt hoe intuïtieve en talige aspecten met elkaar verbonden konden raken tot dat wat wij nu wiskunde noemen, en waarin bovendien het probleem van de ‘eeuwigheid’ van wiskundige vraagstukken wordt opgelost. Een schets van zo’n genealogie is te vinden in Husserl’s essay ‘Over de oorsprong van de meetkunde’.⁴

³Brouwer, ‘On the foundations of mathematics’, [1] p. [[92]].

⁴Dit stuk is sterk fenomenologisch. Ik zal deze component van Husserl’s essay echter schandelijk verwaarlozen, en zijn basisideeën naar het bekende grondslagendebat overzetten.

4 ‘Over de oorsprong van de meetkunde’

De vraag die Husserl in dit werk probeert te beantwoorden is de volgende: hoe is het mogelijk dat iets als de wiskunde, dat ontstaan moet zijn uit door een subject aangevoelde evidentie, uiteindelijk wordt tot iets dat wij zien als een stelsel van tijdloze waarheden? Om tot een antwoord te komen doet hij een historisch onderzoek naar de oorsprong van de meetkunde. ‘Historisch’ dient hier echter niet begrepen te worden in de zin van nauwkeurig feitelijk onderzoek. Veeleer gaat Husserl er vanuit dat het heden historisch bepaald is, en dat een grote schat aan informatie over het verleden dus in het heden besloten ligt. Door nu de mogelijke ontstaansgeschiedenis van de meetkunde, die wij kennen, te beschouwen kunnen wij noodzakelijke waarheden achterhalen. Deze hebben dan wel niet de vorm van preciese gebeurtenissen – zo kunnen wij er op deze wijze niet achter komen wie de eerste meetkundige was – maar geven ons wel inzicht in de algemene structuur van de ontstaansgeschiedenis. Met behulp van deze ‘a priori historische’ methode schrijft Husserl een genealogie van de meetkunde, die echter ook zonder meer van toepassing is op de wiskunde in het algemeen.

In Husserls analyse komen een aantal aspecten naar voren die ook bij Brouwer voorkwamen. Husserl ziet de oorsprong van alle ideële objecten in de acten van een oordelend ‘Ik’ – er is geen Platoonse wereld van niet-stoffelijke objecten, zij krijgen hun realiteit slechts doordat ze door een denkend subject geconstitueerd worden. En evenals Brouwer ziet hij de oorsprong van de wiskunde gelegen in een niet-talige intuïtie van het individu. Maar waar Brouwer hier stopt en wiskundige objecten niets meer laat zijn dan mentale acten van een ‘Ik’, meent Husserl dat zij een objectieve ideële realiteit hebben – wiskundige stellingen kunnen door iedereen ten alle tijden aanschouwd en waar bevonden worden – en buigt hij zich over de vraag hoe dit mogelijk is. Op welke wijze kan de oorspronkelijke subjectieve evidentie een objectief, tijdloos karakter krijgen?

In deze transitie zijn vijf stappen te onderscheiden. Ten eerste die van de *oorspronkelijke evidentie*. Het subject ziet helder en welonderscheiden de waarheid van een bepaald wiskundig feit in. Voor deze waarheid is geen verdere rechtvaardiging in termen van meer basale waarheden, zij is primitief. Zolang het subject de, niet-talige, evidentie actief in zijn geest houdt is zij objectief aanwezig in hem – maar overduidelijk gelokaliseerd in ruimte en tijd. Bovendien is zij vergankelijk, want het subject zal zijn geest onvermijdelijk op iets anders richten. Maar de evidentie is dan toch niet geheel verdwenen, want zij zal *afvloeien in een passieve herinnering*. Het subject heeft nu de mogelijkheid zich de oorspronkelijke evidentie te *herinneren*, en haar opnieuw actief en bewust te doorleven. “Mede verzekerd is daarmee ook het vermogen om [deze identificatie] zoveel men wil te herhalen, en wel met de volle evidentie van de identiteit (identieke gelijkheid) van het produkt door de hele ketting van herhalingen heen.”⁵ Hoewel de tijdafhankelijkheid van de evidentie nu kleiner is geworden, is zij nog steeds gebonden aan het subject. Objectief kan zij echter worden door middel van de *communicatie*, waarmee het individu de door hem beleefde evidentie representeert in taal, en deze meedeelt aan anderen. Het is weliswaar niet mogelijk om de evidentie zelf aan anderen over te dragen, maar wel kan het zo zijn dat onze communicatie ertoe leidt dat zij dezelfde evidentie actief reconstrueren. Ook zij zullen dan de oorspronkelijke evidentie ervaren. Indien dit gelukt, is duidelijk dat zij niet strikt persoonlijk is, en zij bereikt daarmee een grote mate van objectiviteit. Maar nog is het zo dat het ideële voorwerp voor zijn bestaan afhankelijk is van het feit dat iemand het als evidentie in zijn bewustzijn heeft. Hieraan komt een einde in de vijfde stap van het proces, wanneer het *op schrift wordt gesteld* en zo wordt vereeuwigd. Het op schrift gestelde idee heeft de

⁵Husserl, ‘Over de oorsprong van de meetkunde’, [8] p. 65.

potentie om de actieve evidentie op te wekken bij iedereen, op elk moment. Het wiskundige voorwerp is van strikt persoonlijke intuïtie tot objectief, eeuwig object geworden.

Het grote verschil met Brouwer zal nu duidelijk zijn: het oorspronkelijke intuïtieve object, dat nauwelijks objectiviteit bezit, wordt door geslaagde communicatie en de hulp van het schrift omgezet in een eeuwig, objectief object. Taal speelt dus een essentiële rol in de creatie van de wiskunde: zonder taal kan er wel wiskundige evidentie zijn, maar dan toch geen wiskundige praktijk. De op schrift gestelde wiskunde is zowel noodzakelijk voor de objectificatie van haar begrippen als voor de mogelijkheid om er met een grote groep mensen aan te werken. Onze huidige mathematische traditie stoelt dus enerzijds op oorspronkelijke evidentie, en anderzijds op de macht van de taal. Husserl's genealogische schets voldoet uitstekend aan de in de vorige sectie gestelde eisen.

5 Van intuïtie naar formalisme, en terug

Bovendien hebben wij nu een conceptueel kader in handen waarin wij de tekortkomingen van het intuïtionisme en het formalisme kunnen beschouwen. Husserl kijkt naar de mogelijke gevolgen die de objectificatie door middel van het schrift kan hebben voor de wiskundige praktijk. Hij onderscheidt twee manieren om van een opgeschreven mathematische stelling kennis te nemen: de passieve en de actieve. Bij de passieve manier leren wij slechts de geschreven presentatie kennen, en leren deze bijvoorbeeld uit ons hoofd. De actieve manier is wanneer wij vanuit de op schrift gestelde ideeën weer de oorspronkelijke evidentie reconstrueren – dit is feitelijk de enige manier waarop we daadwerkelijk inhoudelijk met het onderwerp bezig zijn. De grote rol die het schrift noodzakelijkerwijs heeft in een volwassen wiskundige praktijk creëert echter het grote gevaar dat men zich slechts nog passief met het beschrevene bezig houdt – en zelfs kan de situatie ontstaan dat men zich de oorspronkelijke evidentie in het geheel niet meer voor de geest *kan* halen. “Men kan gemakkelijk merken dat in het menselijk leven, om te beginnen in elk individueel leven van de kindertijd tot aan de volwassenheid, het oorspronkelijke intuïtieve leven, dat op grond van zijn zintuigelijke ervaring in verschillende vormen van activiteit zijn oorspronkelijke evidente scheppingen tot stand brengt – dat dit oorspronkelijke intuïtieve leven zeer vlug en in toenemende mate ten prooi valt aan de *verleidingen van de taal*. In steeds groeiende mate vervalt het tot een spreken en lezen dat uitsluitend beheerst wordt door associaties en dan ook in zijn verkregen betekenissen genoeg door latere ervaring wordt teleurgesteld.”⁶

Het ligt nu voor de hand het formalisme te identificeren met deze passieve benadering van de wiskunde, waarin de oorspronkelijke intuïties volkomen ontkend worden en men zich slechts nog op de vorm van de schriftelijke uitspraken richt. Husserl's genealogische analyse is dan een vernietigende kritiek op deze conceptie van de wiskunde. Het intuïtionisme kunnen wij plaatsen als een dappere poging terug te keren naar de oorspronkelijke evidentie, en zo de wiskunde haar betekenis terug te geven. Brouwer's filosofie leed echter aan zijn solipsisme, waarin hij de wiskunde opgebouwd dacht door een enkel persoon. Hiermee ontkende hij het belang van de culturele geschiedenis van de wiskunde, die essentieel is om haar talige aspect te kunnen begrijpen. Husserl's schets geeft ons echter de hoop dat wij Brouwer's poging kunnen verbeteren door een nauwkeuriger analyse van de oorsprong van de wiskunde. Over de vorm van de constructieve mathematica die op die wijze zou ontstaan kunnen wij slechts speculeren. Op het eerste gezicht zal zij wellicht minder beperkt zijn dan de intuïtionistische, aangezien zij meer oorspronkelijke evidentie kan toelaten dan Brouwer's twee oer-intuïties. Aan de andere kant

⁶Husserl, ‘Over de oorsprong van de meetkunde’, [8] p. 71.

is het niet onwaarschijnlijk dat de noodzaak de oorspronkelijke evidenties terug te kunnen vinden het accepteren van de intuïtionistische logica noodzakelijk maakt. Zulke speculaties zullen echter op nadere uitwerking moeten wachten.

Referenties

- [1] **Brouwer, L. E. J.** , ‘On the foundations of mathematics’, 1907, in *Brouwer – Collected Works I*, North Holland publishing company, 1975
- [2] **Brouwer, L. E. J.** , ‘The nature of geometry’, 1909, in *Brouwer – Collected Works I*, North Holland publishing company, 1975
- [3] **Brouwer, L. E. J.** , ‘Intuitionism and formalism’, 1912, vertaald in het engels door A. Dresden, in *Brouwer – Collected Works I*, North Holland publishing company, 1975
- [4] **Brouwer, L. E. J.** , ‘Consciousness, Philosophy, and Mathematics’, 1948, in *Brouwer – Collected Works I*, North Holland publishing company, 1975
- [5] **Dalen, D. van**, *Filosofische grondslagen van de wiskunde*, Van Gorcum & Comp., 1978
- [6] **Dalen, D. van**, *From a Brouwerian Point of View*, 1998, *Philosophia Mathematica* (3) Vol. 6 (1998), pp. 209-226
- [7] **Dalen, D. van**, ‘The development of Brouwer’s intuitionism’, uit *Proof theory: history and philosophical significance*, V. F. Hendricks et al. (eds.), Kluwer Academic Publishers, 2001
- [8] **Husserl, E.**, *Over de oorsprong van de meetkunde*, 1977, Het Wereldvenster Baarn, vertaald uit het duits door dr. J. Dutschaever, ingeleid en geannoteerd door dr. Rudolf Boehm